

**Recasages possibles** : 157, 203, 206, 219, 229, 253.

**Référence** : Analyse pour l'agrégation, BERNIS<sup>2</sup> (p. 271-283) - L'oral à l'agrégation de mathématiques, ISENMANN, PECATTE (p.263-270).

**Développement 1 (Ellipsoïde de John-Loewner)**

On appelle *ellipsoïde* (centré en l'origine) tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  de la forme  $\mathcal{E}_q = \{X \in \mathbb{R}^n \mid q(X) \leq 1\}$  où  $q$  est une forme quadratique définie positive sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemme 1** Soient  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ,  $q$  la forme quadratique définie positive canoniquement associée à  $S$ , et  $\|\cdot\|$  la norme sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  subordonnée à la norme euclidienne canonique  $\|\cdot\|_2$ . Alors  $\|S\| = \sup_{\|X\|_2=1} \{q(X)\}$ .

**Lemme 2** Si  $\mathcal{E}_q$  est un ellipsoïde, alors  $\mathcal{E}_q$  est convexe et la forme quadratique définie positive  $q$  définissant  $\mathcal{E}_q$  est unique.

**Lemme 3** Soit  $\mathcal{E}_q$  un ellipsoïde et  $V_q$  son volume. On note  $V_0$  le volume de la boule unité (pour la norme euclidienne canonique), et  $S$  la matrice de  $q$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $V_q = \frac{V_0}{\sqrt{\det(S)}}$ .

**Lemme 4** L'application  $\det : \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement log-concave, *i.e*

$$\forall A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), A \neq B, \forall t \in ]0, 1[, \det(tA + (1-t)B) > \det(A)^t \det(B)^{1-t}.$$

**Théorème 5** Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$  d'intérieur non vide. Alors il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant  $K$ .

Ainsi,

$$\|SX\|_2^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \mu_i e_i \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \mu_i^2 \leq \mu_1^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \mu_1^2 = \rho(S)^2.$$

Ceci justifie l'inégalité  $\|S\| \leq \rho(S)$ , mais en remarquant que  $\|e_1\|_2 = 1$  et que  $\|Se_1\|_2 = \|\mu_1 e_1\|_2 = \mu_1 = \rho(S)$ , on voit bien que  $\|S\| = \rho(S)$ . Montrons alors que

$$\sup_{\|X\|_2=1} \{q(X)\} = \rho(S).$$

À nouveau pour  $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  tel que  $\|X\|_2 = 1$ , on a

$$q(X) = (x_1, \dots, x_n) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i^2 \leq \mu_1 = \rho(S).$$

Par ailleurs,  $q(e_1) = \mu_1 = \rho(S)$ , et  $\|e_1\|_2 = 1$ , donc on a bien

$$\sup_{\|X\|_2=1} \{q(X)\} = \rho(S) = \|S\|,$$

ce qui conclut la preuve du **Lemme 1**.

- *Preuve du Lemme 2* : Comme  $q$  est définie positive, l'application  $\sqrt{q}$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ , pour laquelle  $\mathcal{E}_q = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{q(X)} \leq 1\}$  est la boule unité (fermée). En tant que boule unité pour une norme, l'ensemble  $\mathcal{E}_q$  est donc convexe. Par ailleurs, montrons que si  $\mathcal{E}_q \subset \mathcal{E}_{q'}$ , alors  $q \geq q'$ . Soit  $X \in \mathbb{R}^n$  non nul, on a  $q\left(\frac{X}{\sqrt{q(X)}}\right) = \frac{1}{q(X)} q(X) = 1$  donc  $\frac{X}{\sqrt{q(X)}} \in \mathcal{E}_q \subset \mathcal{E}_{q'}$  et ainsi,  $q'\left(\frac{X}{\sqrt{q(X)}}\right) \leq 1$ . On obtient donc

$$\frac{1}{q(X)} q'(X) \leq 1 \quad \text{i.e} \quad q'(X) \leq q(X).$$

L'inégalité étant triviale pour  $X = 0$ , on a bien  $q' \leq q$ . Ainsi, si  $\mathcal{E}_q = \mathcal{E}_{q'}$ , en considérant cette égalité comme une double inclusion, on obtient  $q \leq q'$  et  $q' \leq q$ , soit  $q = q'$ . Ceci conclut la preuve du **Lemme 2** et nous permet de parler de la forme quadratique définie positive associée à un ellipsoïde donné sans ambiguïté.

- *Preuve du Lemme 3* : D'après le théorème de réduction simultanée, il existe une

$$\|SX\|_2^2 = \left\| S \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \right\|_2^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i S e_i \right\|_2^2$$

base orthonormée  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  pour le produit scalaire canonique, qui est orthogonale pour  $q$ . En notant  $y_i$  les coordonnées d'un vecteur  $X$  dans cette base, *i.e*

$$X = \sum_{i=1}^n y_i e_i,$$

comme  $q$  est définie positive, on voit qu'il existe  $\mu_1, \dots, \mu_n > 0$  tels que

$$q(X) = \sum_{i=1}^n \mu_i y_i^2.$$

Alors, on voit que  $X \in \mathcal{E}_q \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \mu_i y_i^2 \leq 1$ . Si  $x_1, \dots, x_n$  sont les coordonnées dans la base canonique, alors par définition du volume, on a

$$V_q = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{q(X) \leq 1\}} dx_1 \cdots dx_n.$$

Or, la base  $\mathcal{B}$  étant orthonormée, la matrice du changement de base de  $\mathcal{B}_c$  vers  $\mathcal{B}$ , qui est la jacobienne du changement de variables  $x_i \rightarrow y_i$  (à inversion près), est de déterminant  $\pm 1$ , donc la formule du changement de variables donne (attention à ne pas oublier que c'est la valeur absolue du jacobien qui apparaît, d'où l'absence de  $\pm$ )

$$V_q = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{q(X) \leq 1\}} dy_1 \cdots dy_n = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{\mu_1 y_1^2 + \dots + \mu_n y_n^2 \leq 1\}} dy_1 \cdots dy_n.$$

On effectue alors le changement de variables linéaire  $z_i = \sqrt{\mu_i} y_i$ , dont la jacobienne est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} \end{pmatrix},$$

pour obtenir

$$V_q = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{z_1^2 + \dots + z_n^2 \leq 1\}} \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \cdots \mu_n}} dz_1 \cdots dz_n = \frac{V_0}{\sqrt{\mu_1 \cdots \mu_n}}.$$

Or, à nouveau puisque la matrice de passage de  $\mathcal{B}_c$  vers  $\mathcal{B}$  est orthogonale, on a

$\det(S) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \mu_1 \cdots \mu_n$ , donc finalement

$$V_q = \frac{V_0}{\sqrt{\det(S)}},$$

ce qui achève la preuve du **Lemme 3**.

- *Preuve du Lemme 4* : Soient  $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  tels que  $A \neq B$  et  $t \in ]0, 1[$ . Le théorème de réduction simultanée, que l'on applique à  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , nous donne l'existence d'une matrice  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonale avec coefficients diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$  telles que

$$A = P^\top P \quad \text{et} \quad B = P^\top D P.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \det(A)^t \det(B)^{1-t} &= \det(P^\top P)^t \det(P^\top D P)^{1-t} \\ &= \det(P)^{2t} \det(P)^{2(1-t)} \det(D)^{1-t} \\ &= \det(P)^2 \det(D)^{1-t}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \det(tA + (1-t)B) &= \det(tP^\top P + (1-t)P^\top D P) \\ &= \det(P^\top (tI_n + (1-t)D) P) \\ &= \det(P)^2 \det(tI_n + (1-t)D). \end{aligned}$$

Ainsi, il nous suffit de montrer

$$\det(tI_n + (1-t)D) > \det(D)^{1-t}$$

Or, le membre de gauche est égal à  $\prod_{i=1}^n (t + (1-t)\lambda_i)$ , et le membre de droite est quant à lui égal à  $\prod_{i=1}^n \lambda_i^{1-t}$ . Par stricte croissance de  $\ln$ , il nous suffit de montrer que

$$\ln \left( \prod_{i=1}^n (t + (1-t)\lambda_i) \right) = \sum_{i=1}^n \ln(t + (1-t)\lambda_i) > \sum_{i=1}^n (1-t) \ln(\lambda_i) = \ln \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i^{1-t} \right).$$

Or, par stricte concavité du  $\ln$ , on a pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\ln(t + (1-t)\lambda_i) \geq t \ln(1) + (1-t) \ln(\lambda_i) = (1-t) \ln(\lambda_i),$$

avec inégalité stricte dès que  $\lambda_i \neq 1$ . Or, comme  $A \neq B$ , il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\lambda_i \neq 1$ , et ainsi, d'après l'inégalité précédente,

$$\sum_{i=1}^n \ln(t + (1-t)\lambda_i) > \sum_{i=1}^n (1-t)\lambda_i,$$

ce qui est exactement ce qu'on voulait montrer. On a ainsi prouvé le **Lemme 4**.

- *Preuve du Théorème 5* : Montrons l'existence de l'ellipsoïde de volume minimal, ce qui revient d'après le **Lemme 3** à maximiser l'application déterminant sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Fixons  $K \subset \mathbb{R}^n$  un compact d'intérieur non vide. On munit l'espace  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  de la norme  $\|\cdot\|$  subordonnée à la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$ , i.e si  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , alors

$$\|S\| = \sup_{\|X\|_2 \leq 1} \{\|SX\|_2\}.$$

On se place dans un premier temps sur  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , qui présente l'avantage d'être fermé, ce que n'est pas  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . On pose

$$\mathcal{C} = \{S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \mid \forall X \in K, X^\top SX \leq 1\},$$

de sorte que  $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices (dans la base canonique) de formes quadratiques définies positives  $q$  telles que  $K \subset \mathcal{E}_q$ . Montrons que  $\mathcal{C}$  est une partie compacte non vide de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Comme on travaille en dimension finie, il suffit pour la compacité de montrer que  $\mathcal{C}$  est fermée et bornée.

- Montrons que  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ . Comme  $K$  est compact, il existe  $M > 0$  tel que  $\forall X \in K, \|X\|_2 \leq M$ . Alors, la matrice  $S = \frac{1}{M^2} I_n$  est clairement dans  $\mathcal{C}$ . En effet  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , et si  $X \in K$ , alors

$$X^\top SX = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{M^2} = \frac{\|X\|_2^2}{M^2} \leq 1.$$

- Montrons que  $\mathcal{C}$  est fermée. Soit  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{C}$  qui converge

vers  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Pour  $X \in \mathbb{R}^n$ , on a par Cauchy-Schwarz  $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |X^\top S_k X - X^\top S X| &= |X^\top (S_k - S) X| \\ &\leq \|X\|_2 \|(S_k - S) X\|_2 \\ &\leq \|X\|_2 \|S_k - S\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Ainsi, puisque pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , tout  $X \in \mathbb{R}^n$  et tout  $Y \in K$ , on a

$$X^\top S_k X \geq 0 \quad \text{et} \quad Y^\top S_k Y \leq 1,$$

en passant à la limite sur  $k$ , on obtient  $X^\top S X \geq 0$  et  $Y^\top S Y \leq 1$ , ce qui montre que  $S \in \mathcal{C}$ , et ainsi  $\mathcal{C}$  est fermée dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

- Montrons que  $\mathcal{C}$  est bornée. Soit  $S \in \mathcal{C}$ , et soit  $q$  la forme quadratique positive canoniquement associée. On note (même si  $q$  n'est pas définie positive) encore  $\mathcal{E}_q = \{q(X) \leq 1\} \supset K$ . Comme  $K$  est d'intérieur non vide, il existe  $A \in K$  et  $r > 0$  tel que  $B(A, r) \subset K \subset \mathcal{E}_q$ . Comme  $\mathcal{E}_q$  est symétrique par rapport à 0 (car  $q(-X) = q(X)$ ), on a aussi  $B(-A, r) \subset \mathcal{E}_q$  et enfin, par convexité, on a  $B(0, r) \subset \mathcal{E}_q$  (faire un dessin). Or,  $B(0, r)$  est exactement l'ellipsoïde associé à la forme quadratique  $\tilde{q} = \frac{\|\cdot\|_2^2}{r^2}$ , donc par le raisonnement mené dans la preuve du **Lemme 2**, l'inclusion  $B(0, r) \subset \mathcal{E}_q$  implique l'inégalité  $q \leq \tilde{q}$ . On utilise alors le **Lemme 1** :

$$\|S\| = \sup_{\|X\|_2=1} \{q(X)\} \leq \sup_{\|X\|_2=1} \left\{ \frac{\|X\|_2^2}{r^2} \right\} = \frac{1}{r^2}.$$

Ceci montre bien que  $\mathcal{C}$  est bornée, et donc  $\mathcal{C}$  est finalement une partie non vide et compacte et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

Le déterminant étant une application continue sur le compact non vide  $\mathcal{C}$ , il admet un maximum en  $S_{\max} \in \mathcal{C}$ . De plus, ce maximum est nécessairement atteint sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  car sur  $\mathcal{S}_n^+ \setminus \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , on a  $\det = 0$  et que

$$\det(S_{\max}) \geq \det\left(\frac{1}{M^2} I_n\right) > 0.$$

Ainsi, on a bien trouvé un ellipsoïde  $\mathcal{E}_q$  (celui associé à  $S_{\max}$ ) contenant  $K$  et de volume minimal, ce qui termine la preuve de l'existence.

Montrons enfin l'unicité d'un tel ellipsoïde. On commence par montrer que  $\mathcal{C}$  est convexe. Soient  $S_1, S_2 \in \mathcal{C}$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . La matrice  $\lambda S_1 + (1 - \lambda)S_2$  est clairement symétrique (par linéarité de la transposée). De plus, si  $X \in \mathbb{R}^n$  et  $Y \in K$ , on a

$$X^\top (\lambda S_1 + (1 - \lambda)S_2)X = \lambda X^\top S_1 X + (1 - \lambda)X^\top S_2 X \geq 0 + 0 = 0.$$

$$\text{et } Y^\top (\lambda S_1 + (1 - \lambda)S_2)Y = \lambda Y^\top S_1 Y + (1 - \lambda)Y^\top S_2 Y \leq \lambda + (1 - \lambda) = 1.$$

Ainsi,  $\lambda S_1 + (1 - \lambda)S_2 \in \mathcal{C}$  ce qui montre que  $\mathcal{C}$  est convexe.

Supposons alors par l'absurde que  $S_1$  et  $S_2$  sont deux éléments de  $\mathcal{C}$  maximisant  $\det$ . Par convexité,  $\frac{S_1 + S_2}{2} \in \mathcal{C}$ , on va montrer qu'alors son déterminant est strictement supérieur à celui de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour cela, remarquons que comme on l'a vu dans la preuve de l'existence,  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Alors, en utilisant le **Lemme 4**, on obtient

$$\det\left(\frac{S_1 + S_2}{2}\right) > \frac{\det(S_1) + \det(S_2)}{2} = \det(S_1) = \max_{S \in \mathcal{C}} \{\det(S)\}.$$

Ceci est absurde, donc l'élément  $S_{\max}$  maximisant  $\det$  sur  $\mathcal{C}$  est unique, ce qui montre finalement l'unicité de l'ellipsoïde de John-Loewner.

Répartition des items à prouver selon les leçons :

- Leçons 157, 203, 219 : items **2,3,5**
- Leçons 229, 253 : items **2, 4, 5**

**Commentaires et prolongements :**

- L'inconvénient de ce résultat est qu'il ne considère que des ellipsoïdes centrés en 0. Or, si l'objectif est d'approximer un compact d'intérieur non vide par un ellipsoïde, on voit bien qu'il est totalement arbitraire de centrer l'ellipsoïde en l'origine. Une première solution à ce problème est de translater le compact pour qu'il contienne l'origine en son intérieur, puis d'appliquer le théorème et de faire la translation inverse sur l'ellipsoïde obtenu. C'est mieux mais c'est toujours pas tip top, puisque la translation choisie semble totalement arbitraire. Le véritable théorème de John est en fait l'existence (et l'unicité) d'un ellipsoïde de volume minimal contenant  $K$ , et de centre quelconque ! Pour cela, on reprend la preuve du **Théorème 5**, mais en remplaçant le convexe compact  $C$  par

$$C' = \{(S, b) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \mid \forall X \in K, (X - b)^\top S(X - b) \leq 1\}$$

(voir commentaires sur le sujet dans le BERNIS<sup>2</sup> ou dans le ISENMANN, PECATTE).

- Une application tout aussi remarquable qu'inattendue (pour moi en tout cas) de l'existence et de l'unicité de l'ellipsoïde de John-Loewner est le fait que tout sous-groupe compact de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  soit contenu dans un conjugué de  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Montrons ce résultat :

Soit  $G \leq \text{GL}_n(\mathbb{R})$  un sous-groupe compact. On commence par montrer qu'il admet un produit scalaire invariant, c'est-à-dire qu'il existe une forme quadratique  $q$  définie positive sur  $\mathbb{R}^n$  telle que  $G \subseteq \mathcal{O}(q) = \{g \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) : q_g = q\}$  où on a noté  $q_g$  la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^n$  définie par  $q_g(x) = g(gx)$ . Pour cela, notons  $\overline{B}$  la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^n$  et considérons l'application continue

$$f : \begin{cases} G \times \overline{B} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (g, x) & \longmapsto & gx. \end{cases}$$

$G \times \overline{B}$  est compact en tant que produit de compacts, donc  $f(G \times \overline{B})$  est compact. Notons le  $K$ . Ce compact contient  $\overline{B}$  car  $I_n \in G$ , donc il est d'intérieur non vide. On peut donc appliquer notre **Théorème 5** et exhiber l'unique ellipsoïde  $\mathcal{E}_q$  de volume minimal qui contient  $K$ . On va alors montrer que  $G \subseteq \mathcal{O}(q)$ . Fixons donc  $g \in G$  et considérons la forme quadratique  $q_g$  dont la notation a été introduite plus haut. Si  $y \in K$ , alors il existe  $g \in G$  et  $x \in \overline{B}$  tels que  $y = g^{-1}x$ . Alors,

comme  $\overline{B} \subseteq K \subseteq \mathcal{E}_q$ , on a

$$q_g(y) = q(gy) = q(x) \leq 1 \quad \text{d'où} \quad K \subseteq \mathcal{E}_{q_g}.$$

De plus, on a vu dans le **Lemme 3** que si  $S_g$  est la matrice de  $q_g$  dans la base canonique, alors  $V_{q_g} = \frac{V_0}{\sqrt{\det(S_g)}}$ . Or,  $S_g = g^\top S g$  donc

$$V_{q_g} = \frac{V_0}{\sqrt{\det(g^\top) \det(S) \det(g)}} = \frac{1}{|\det(g)|} \frac{V_0}{\sqrt{\det(S)}} = \frac{V_q}{|\det(g)|}.$$

Ainsi, il suffit de voir que  $|\det(g)| = 1$ . Comme  $G$  est compact, et comme l'application  $M \mapsto |\det(M)|$  est continue, elle est bornée sur  $G$ . Ainsi, il existe  $R > 0$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $|\det(g^k)| = |\det(g)|^k \leq R$ . Comme  $\det(g) \neq 0$ , on voit que cela n'est possible que si  $|\det(g)| = 1$ . Finalement,  $V_{q_g} = V_q$  et par unicité de l'ellipsoïde de John-Loewner de  $K$ , on a  $\mathcal{E}_{q_g} = \mathcal{E}_q$ , puis  $q_g = q$  par le **Lemme 2**. Reformulons cela en termes matriciels et montrons que  $G$  est bien conjugué à un sous-groupe de  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . On a donc

$$\forall g \in G, \quad g^\top S g = S,$$

ce qui veut dire que  $G$  est contenu dans le stabilisateur de  $S$  pour l'action de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  par congruence. Or, puisque  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , il existe  $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  $S = R^\top R = R^\top I_n R$ , ce qui montre que  $S$  et  $I_n$  sont dans la même orbite sous cette action. Ainsi,  $\text{Stab}(S)$  et  $\text{Stab}(I_n) = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  sont liés par la relation de conjugaison

$$\text{Stab}(S) = \text{Stab}(R \cdot I_n) = R \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) R^{-1}.$$

On voit ainsi que  $R^{-1} G R$  est un sous-groupe de  $R^{-1} \text{Stab}(S) R = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ , cqfd.